

## OTIMIZAÇÃO DO DIMENSIONAMENTO DE VIGAS EM CONCRETO ARMADO ATRAVÉS DE ANÁLISE LINEAR COM REDISTRIBUIÇÃO

**Paulo S. T. Miranda**

*pfilho\_concreto@yahoo.com.br*

Centro de Tecnologia, Universidade Federal do Ceará

Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil, Fortaleza - CE – Brasil

***Resumo.** Trabalho apresentado à disciplina Otimização de Estruturas como requisito para obtenção de nota parcial. A consideração da não-linearidade física do concreto armado possibilita a redução no custo final da estrutura devido à utilização da maior capacidade de resistência do material. A não-linearidade física é abordada na NBR 6118:2003 através de diferentes tipos de análises. Neste trabalho é realizada análise linear com redistribuição em um modelo de viga contínua. Os valores da taxa de redistribuição de momentos e da altura da viga que levam à otimização da função custo total são obtidos através de ferramentas de otimização estrutural.*

***Palavras-chave:** Concreto armado, Análise Não-Linear Física, Otimização Estrutural*

## 1. INTRODUÇÃO

A Engenharia busca encontrar soluções ótimas para diversos problemas. Estas soluções passam inicialmente pela avaliação da segurança e pela verificação dos critérios de normas. Atendidas estas situações, o projetista tem como objetivo principal a minimização dos recursos necessários à execução do serviço visando a redução do custo final.

Neste processo de minimização são aplicados conceitos e ferramentas de otimização estrutural.

Uma maneira de reduzir custos em estruturas de concreto armado é levar em consideração a sua não-linearidade física, aproximando o modelo o máximo possível da realidade e aproveitando uma maior capacidade resistente do material.

## 2. MODELOS DE ANÁLISE

No seu item 14.5, a NBR 6118:2003 permite que a análise estrutural seja efetuada por qualquer um dos cinco diferentes métodos: análise linear, análise linear com redistribuição, análise plástica, análise não-linear e análise através de modelos físicos.

A escolha do método a ser adotado depende:

- das leis constitutivas adotadas para os materiais;
- da precisão desejada para os resultados;
- da complexidade da estrutura;
- do tipo de estado limite que esteja sendo verificado.

Neste trabalho são adotadas as análises linear e linear com redistribuição.

### 2.1 Análise linear

A NBR 6118:2003 em seu item 14.5.2 estabelece:

*“Admite-se comportamento elástico-linear para os materiais.*

*... Os resultados de uma análise linear são usualmente empregados para a verificação de estados limites de serviço. É possível estender os resultados para verificações de estado limite último, mesmo com tensões elevadas, desde que se garanta a ductilidade dos elementos estruturais.”*

Esta extensão dos resultados da análise linear para a verificação de estado de limite último é baseada no Teorema do limite inferior. Chen (1988) afirma que se existe um carregamento externo para o qual é possível encontrar um campo de esforços solicitantes que satisfaça todas as condições de equilíbrio e, também, a condição de plastificação em todos os pontos, ou seja nenhum lugar viola a condição de escoamento, então esse carregamento é inferior ao que provoca o colapso da peça. Este Teorema também é conhecido como Teorema a favor da segurança.

Segundo Leonhardt (1979) as verificações a serem feitas pela Teoria da plasticidade, que é não-linear, são bastante complicadas para a maioria dos casos da prática. Existe por isso uma necessidade de critérios simples, que permitam uma distribuição de momentos através do emprego dos métodos usuais de dimensionamento baseados na análise linear. Para suprir esta necessidade, um método foi elaborado por G. Macchi para compor as diretrizes do CEB. Com base nesse método, para a garantia da aplicação do Teorema do limite inferior, é necessário que as peças tenham um comportamento plástico, ou seja, tenham capacidade de se deformar

plasticamente sem a perda brusca da capacidade resistente. Por conta disso, as peças de concreto armado devem possuir uma ductilidade mínima.

Os limites de ductilidade são abordados na NBR 6118:2003 no seu item 14.6.4.3:

*“A capacidade de rotação dos elementos estruturais é função da posição da linha neutra no ELU. Quanto menor for  $x/d$ , tanto maior será essa capacidade. Para melhorar a ductilidade das estruturas nas regiões de apoio das vigas ou de ligações com outros elementos estruturais, mesmo quando não forem feitas redistribuições de esforços solicitantes, a posição da linha neutra no ELU deve obedecer aos seguintes limites:*

- a)  $x/d$  0,50 para concretos com  $f_{ck} \leq 35$  MPa*
- b)  $x/d$  0,40 para concretos com  $f_{ck} > 35$  MPa...”*

## **2.2 Análise linear com redistribuição**

A NBR 6118:2003 em seu item 14.5.3 estabelece:

*“Na análise linear com redistribuição, os efeitos das ações, determinados em uma análise linear, são redistribuídos na estrutura, para as combinações de carregamento do ELU. Nesse caso as condições de equilíbrio e de ductilidade devem ser obrigatoriamente satisfeitas. Todos os esforços internos devem ser recalculados de modo a garantir o equilíbrio de cada um dos elementos estruturais e da estrutura como um todo...”*

Este modelo de análise reduz os momentos fletores negativos nos apoios e conseqüentemente aumenta os momentos fletores positivos. A redistribuição de esforços pode trazer como benefícios a diminuição no consumo de aço e o melhor detalhamento da armadura, evitando congestionamento nos apoios.

Os limites para a redistribuição dos momentos são também abordados na NBR 6118:2003 no seu item 14.6.4.3:

*“... Quando for efetuada uma redistribuição, reduzindo-se um momento fletor de  $M$  para  $M_r$ , em uma determinada seção transversal, a relação entre o coeficiente de redistribuição  $\mu$  e a posição da linha neutra nessa seção  $x/d$ , para o momento reduzido  $M_r$ , deve ser dada por:*

- a)  $0,44 + 1,25 x/d$  para concretos com  $f_{ck} \leq 35$  MPa; (1)*
- b)  $0,56 + 1,25 x/d$  para concretos com  $f_{ck} > 35$  MPa. (2)*

*O coeficiente de redistribuição deve, ainda, obedecer aos seguintes limites:*

- a) 0,90 para estruturas de nós móveis;*
- b) 0,75 em qualquer outro caso.*

*Pode ser adotada redistribuição fora dos limites estabelecidos nesta Norma, desde que a estrutura seja calculada mediante o emprego de análise não-linear ou de análise plástica, com verificação explícita da capacidade de rotação de rótulas plásticas.”*

É apresentado na Fig. 1 um exemplo de diagrama de momento fletor com redistribuição.

# MOMENTOS FLETORES DE CÁLCULO ( $M_{dx}$ )

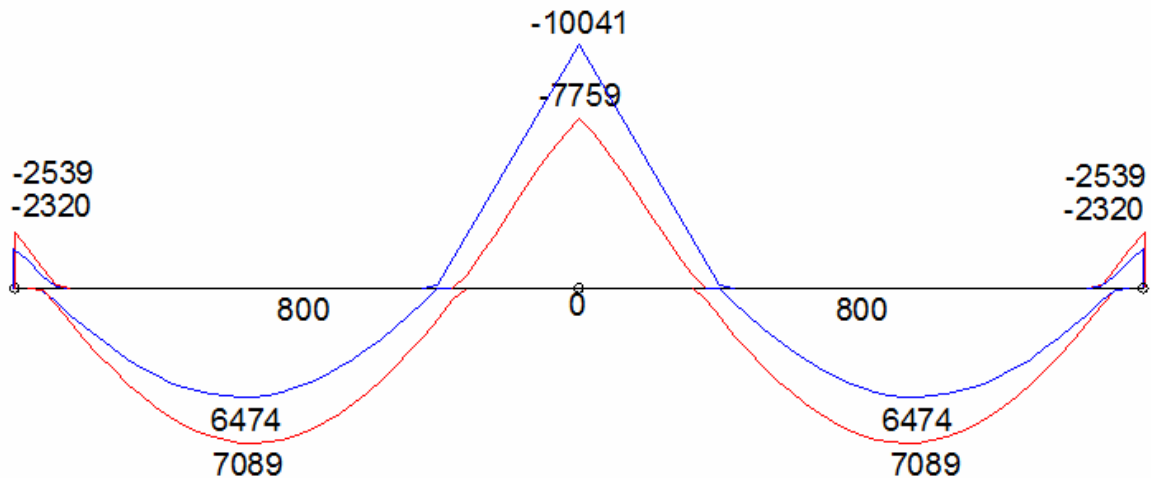


Figura 1 – Exemplo de redistribuição de momentos fletores em vigas contínuas

## 3. DIMENSIONAMENTO DA ESTRUTURA DE CONCRETO

### 3.1 Hipóteses básicas de cálculo

As hipóteses para o cálculo no estado-limite último estão no item 17.2.1 da NBR 6118:2003 e são resumidamente abordadas a seguir:

- As seções transversais permanecem planas após o início da deformação até o estado limite último (hipótese de Bernoulli).
- As tensões de tração no concreto, normais à seção transversal, podem ser desprezadas.
- Admite-se que a distribuição de tensões no concreto seja feita de acordo com o diagrama parábola-retângulo da Fig. 2, com base no diagrama tensão-deformação simplificado do concreto, com tensão de pico igual a  $0,85 f_{cd}$ . O diagrama parábola-retângulo é composto por uma parábola do 2º grau, com vértice na fibra correspondente à deformação de compressão de 0,2% e por um trecho reto entre as deformações de 0,2% e 0,35%. Permite-se a substituição do diagrama parábola-retângulo por um retângulo de altura  $0,8 x$ , em que  $x$  é a profundidade da linha neutra com a seguinte tensão:
  - $0,85 f_{cd}$  (no caso da largura da seção, medida paralelamente à linha neutra, não diminuir a partir desta para a borda comprimida);
  - $0,80 f_{cd}$  (no caso contrário).

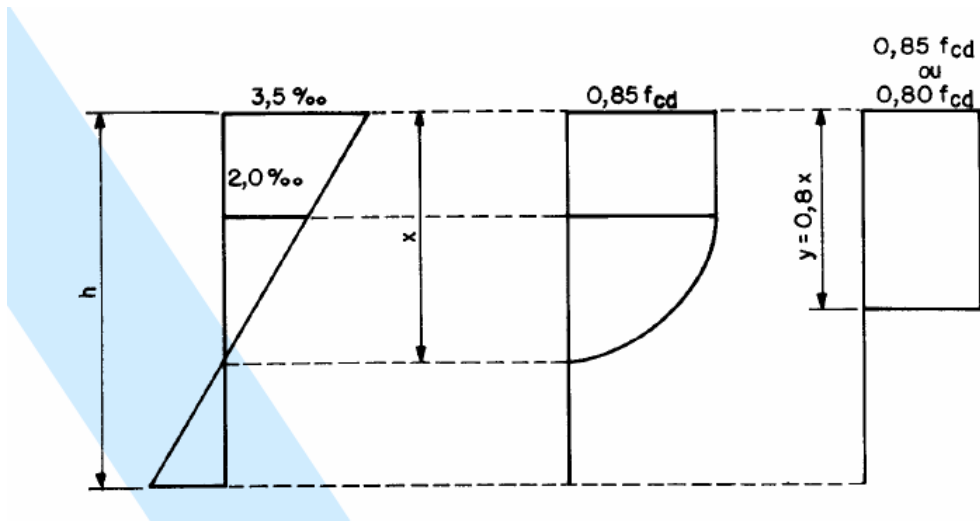


Figura 2 – Distribuição de tensões no concreto de acordo com o diagrama parábola-retângulo (NB-1:1980)

d) O estado limite último é caracterizado quando a distribuição das deformações na seção transversal pertencer a um dos domínios definidos na Fig. 3.

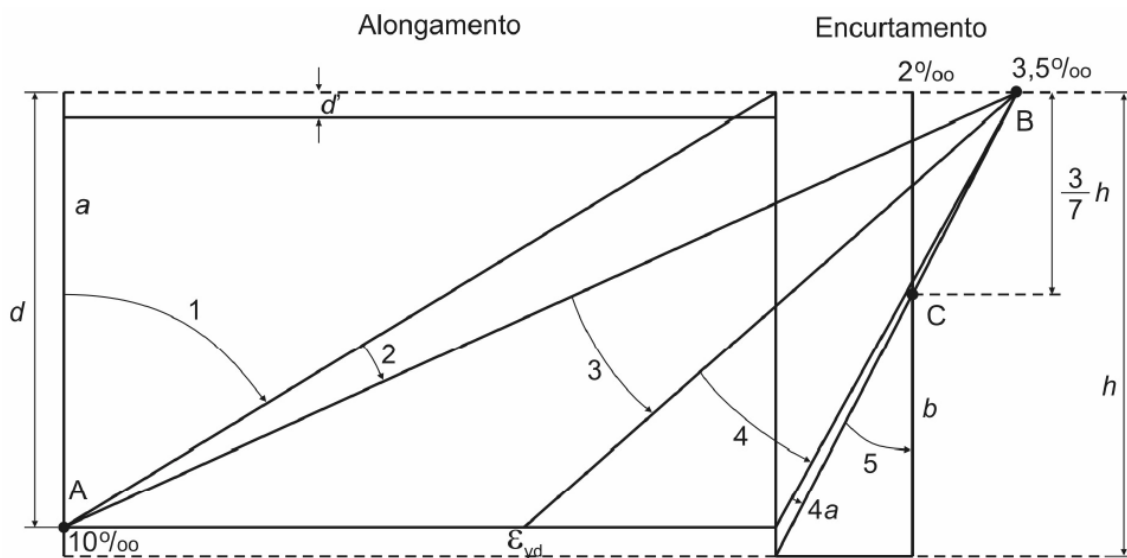


Figura 3 – Domínios de estado limite último de uma seção transversal (NBR 6118:2003)

Cada domínio pode simplificarmente ser caracterizado da seguinte forma:

- reta a: tração uniforme;
- domínio 1: tração não uniforme, sem compressão;
- domínio 2: flexão simples ou composta sem ruptura à compressão do concreto ( $\epsilon_c < 0,35\%$  e com o máximo alongamento permitido do aço);
- domínio 3: flexão simples (seção subarmada) ou composta com ruptura à compressão do concreto e com escoamento do aço ( $\epsilon_s = \epsilon_{yd}$ );
- domínio 4: flexão simples (seção superarmada) ou composta com ruptura à compressão do concreto e aço tracionado sem escoamento ( $\epsilon_s < \epsilon_{yd}$ );
- domínio 4a: flexão composta com armaduras comprimidas;
- domínio 5: compressão não uniforme, sem tração;
- reta b: compressão uniforme.

Segundo Carvalho (2004) o maior momento resistido por uma seção retangular, com economia, na flexão simples e com armadura simples (apenas armadura tracionada) é obtido com a seção trabalhando no limite entre os domínios 3 e 4, e o valor numérico depende do tipo de aço (tensão e deformação específica), para uma mesma seção e mesmo  $f_{ck}$ .

Para o dimensionamento da armadura, inicialmente encontra-se o valor de  $x$  a partir da Eq. (3) e de posse desse valor encontra-se a seção da armadura usando a Eq. (4).

$$M_d = 0.85 \frac{f_{ck}}{1.4} 0.80xb(d - 0.4x) \quad (3)$$

$$A_s = \frac{M_d}{(d - 0.4x) f_{yk} / 1.15} \quad (4)$$

#### 4. CARACTERÍSTICAS DA VIGA

O modelo de viga utilizado neste trabalho é uma viga contínua com dois vãos. Nos apoios extremos são impedidos os deslocamentos nos eixos  $x$  e  $y$  e é permitida a rotação em torno do eixo  $z$ . O  $f_{ck}$  adotado deve ser menor ou igual a 35 MPa de forma a satisfazer as restrições de norma adotadas.

Para simplificar o procedimento de cálculo não foram consideradas as armaduras transversais (estribos) nem as armaduras de pele em vigas com altura maior que 60cm como estabelece a NBR 6118:2003 em seu item 17.3.5.2.3.

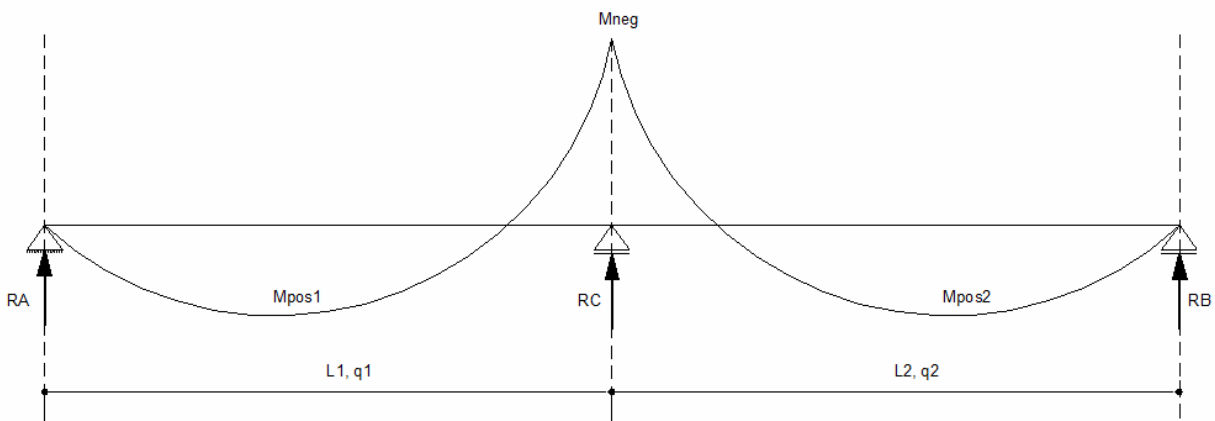


Figura 4 – Modelo de viga utilizado neste trabalho

## 5. PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO

No processo de otimização foi utilizado o MS-Excel sendo a configuração do solver apresentada na Fig. 5.



Figura 5 – Configuração do solver

## 6. FUNÇÃO OBJETIVO

A função escolhida para ser otimizada (minimizada) foi a função custo total (C) composta pelos seguintes fatores:

$$C = C_c + C_f + C_a \quad (5)$$

onde:

- $C_c$  = custo do concreto;
- $C_f$  = custo das formas;
- $C_a$  = custo das armaduras.

O custo do concreto é definido pela seguinte equação:

$$C_c = bh(L_1 + L_2)R\$c \quad (6)$$

onde:

- $b$  = largura da viga;
- $h$  = altura da viga;
- $L_1$  = vão 1 da viga;
- $L_2$  = vão 2 da viga;
- $R\$c$  = custo do metro cúbico do concreto lançado e adensado na obra.

O custo das formas é definido de maneira simplificada pela seguinte equação:

$$C_f = (b + 2h)(L_1 + L_2)R\$f \quad (7)$$

onde:

- R\$f = custo do metro quadrado de forma executado na obra.

O custo das armaduras é definido de maneira simplificada pela seguinte equação:

$$C_a = C_{ap1} + C_{ap2} + C_{an} \quad (8)$$

$$C_{ap1} = A_{sp1} (L_1 + 0.20 + 0.20) \rho_a R\$a \quad (9)$$

$$C_{ap2} = A_{sp2} (L_2 + 0.20 + 0.20) \rho_a R\$a \quad (10)$$

$$C_{an} = A_{sn} \left( \left( \frac{L_1}{4} + 1.20 \right) + \left( \frac{L_2}{4} + 1.20 \right) \right) \rho_a R\$a + 0.4 \left( \left( \frac{3L_1}{4} - 1 \right) + \left( \frac{3L_2}{4} - 1 \right) \right) \rho_a R\$a \quad (11)$$

onde:

- $C_{ap1}$  = Consumo de aço para combater o momento positivo no vão 1;
- $C_{ap2}$  = Consumo de aço para combater o momento positivo no vão 2;
- $C_{an}$  = Consumo de aço para combater o momento negativo no apoio central;
- $A_{sp1}$  = Seção de aço no vão 1;
- $A_{sp2}$  = Seção de aço no vão 2;
- $A_{sn}$  = Seção de aço no apoio central;
- $\rho_a$  = Massa específica do aço;
- R\$a = custo do peso (Kg) de aço cortado, dobrado e montado na obra.

Para a determinação destas equações foram feitas as seguintes simplificações:

1. Foram adotados os seguintes valores: 1.20m para decalagem e ancoragem reta da armadura negativa; uma ancoragem em gancho de 0.20m das armaduras positivas nas extremidades; uma ancoragem reta de 0.20m das armaduras positivas no apoio central; um traspasse de 0.20m entre a armadura negativa e a armadura construtiva;
2. O comprimento da ferragem negativa equivale a um quarto do vão mais o valor adotado para decalagem e ancoragem reta, sendo o complemento de armadura até o apoio, ou seja, a armadura construtiva de  $0.4 \text{ cm}^2$  (2 ferros de 5.0mm);
3. Não foram adotadas armaduras com diâmetros comerciais (variáveis discretas).



## VIGA (b x h)

1:50

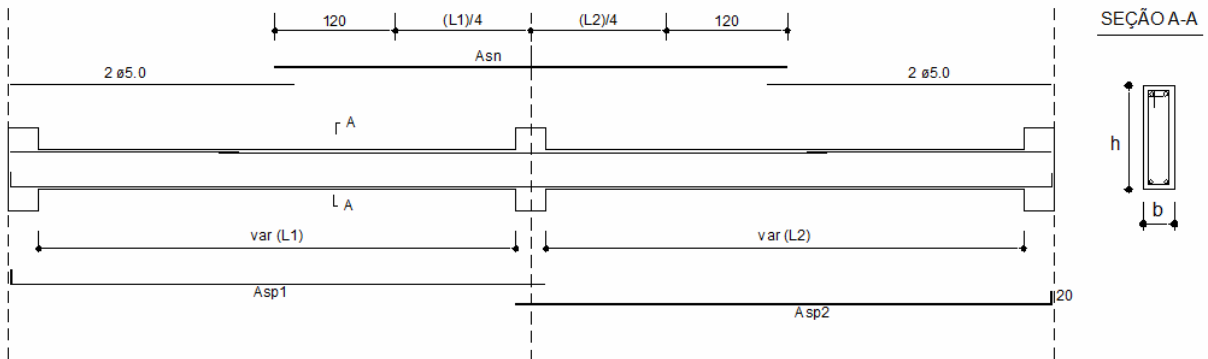


Figura 6 – Esquema do modelo de detalhamento da viga

## 7. VARIÁVEIS E RESTRIÇÕES

Foram adotadas como variáveis a altura da viga ( $h$ ) e o fator de redução do momento negativo ( $\gamma$ ). Como restrições foram adotadas as seguintes condições:

- $x_n/d = 0,50$ ; (limite de ductilidade nos apoios segundo a NBR 6118:2003)
- $x_{p1}/d = 0,682$ ; (limite de utilização de flexão simples e armadura simples nos vãos)
- $x_{p2}/d = 0,682$ ; (limite de utilização de flexão simples e armadura simples nos vãos)
- $\gamma = 0,44 + 1,25 x_n/d$ ; (limite de redistribuição para  $f_{ck} = 35$  MPa segundo a NBR 6118:2003);
- $\gamma = 0,75$ ; (limite de redistribuição para estruturas de nós fixos segundo a NBR 6118:2003)
- $\gamma = 1,00$ ; (análise linear sem redistribuição).

## 8. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Tomando como base os seguintes valores para o dimensionamento de uma viga contínua seguindo o modelo adotado neste trabalho:

- Vãos:  $L_1$  e  $L_2$  iguais a 5,0 m;
- Cargas distribuídas: 1500 kgf/m mais o peso próprio em cada vão;
- Propriedades do concreto:  $f_{ck}$  de 20 MPa,  $E_{cs}$  de 10645 MPa e massa específica ( $\rho_c$ ) de 2500 kgf/m<sup>3</sup>;
- Propriedades do aço: CA-50 e massa específica ( $\rho_a$ ) de 7850 kgf/m<sup>3</sup>;
- Características da seção: largura de 15cm e cobrimento de 2cm;
- Custos unitários: 1 m<sup>3</sup> de concreto por R\$ 250,00, 1 m<sup>2</sup> de forma executada por R\$ 40,00 e 1 kg de ferro por R\$ 6,00.

Inicialmente foi realizada uma análise linear ( $\gamma = 1,00$ ) com a altura da viga estimada em 10% do vão ( $h=50$ cm) que é uma prática usual de projeto. Em seguida foi aplicado o processo de otimização adotando a análise linear com redistribuição. O comparativo dos resultados obtidos nas duas análises se encontra na Tabela 1.

Tabela 1. Momentos fletores nas lajes

		h (m)	M <sub>neg</sub> (kgf.m)	M <sub>pos1</sub> (kgf.m)	M <sub>pos2</sub> (kgf.m)	A <sub>sn</sub> (cm <sup>2</sup> )	A <sub>sp1</sub> (cm <sup>2</sup> )	A <sub>sp2</sub> (cm <sup>2</sup> )	Custo total (R\$)
<b>Análise linear</b>	1,00	0,50	-5273	2966	2966	3,92	2,10	2,10	855,12
<b>Análise linear com redistribuição</b>	0,92	0,39	-4727	3057	3057	4,80	2,90	2,90	791,95
<b>Variação</b>	8,00%	-22,00%	-10,35%	2,98%	2,98%	18,33%	27,59%	27,59%	-7,39%

Os resultados do mesmo exemplo adotando o preço do aço duas vezes maior (R\$ 12,00/kg) são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2. Momentos fletores nas lajes

		h (m)	M <sub>neg</sub> (kgf.m)	M <sub>pos1</sub> (kgf.m)	M <sub>pos2</sub> (kgf.m)	A <sub>sn</sub> (cm <sup>2</sup> )	A <sub>sp1</sub> (cm <sup>2</sup> )	A <sub>sp2</sub> (cm <sup>2</sup> )	Custo total (R\$)
<b>Análise linear</b>	1,00	0,50	-5273	2966	2966	3,92	2,10	2,10	1062,74
<b>Análise linear com redistribuição</b>	0,75	0,44	-3901	3434	3434	3,31	2,88	2,88	1041,79
<b>Variação</b>	25,00%	-12,00%	-26,02%	13,63%	13,63%	-15,56%	27,08%	27,08%	-1,97%

## 9. CONCLUSÃO

A aplicação destes exemplos comprova a eficiência do processo de otimização no dimensionamento de vigas em concreto armado através de análise linear com redistribuição. Importante observar a diferença na variação dos custos totais devido a variação no custo unitário de um dos insumos do concreto armado, mostrando a forte influência das oscilações de mercado no dimensionamento ótimo das estruturas.

No caso da análise linear com redistribuição a adoção de seção T nas vigas leva a resultados ainda mais satisfatórios devido à maior capacidade resistente destas seções nos vãos, onde há o aumento dos momentos positivos. Esta afirmação pode ser verificada na Tabela 3 retirada de um exemplo da publicação especial do Ibracon (2007).

Tabela 3. Comparação do consumo de aço (IBRACON:2007)

Tipo de análise	Seção transversal	Consumo de aço (kg)	Diferença em relação à análise linear com seção retangular (%)
Análise linear	Retangular	278.2	0
Análise linear	T	259.7	-6.7
Análise linear com redistribuição ( =0.75)	T	241.5	-13.2
Análise plástica ( =0.75)	T	237.0	-14.8

Para alcançar resultados mais precisos pode-se aprofundar este estudo inserindo no modelo equações que melhor representem as simplificações adotadas.

## REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 6118: projetos de estruturas de concreto: procedimento*. Rio de Janeiro, 2003.

CARVALHO, Roberto Chust. *Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado: segundo a NBR 6118:2003*. São Carlos: EdUFSCar, 2004.

CHEN, Wai-Fah.; HAN D.J. – *Plasticity for Structural Engineers*. New York: Springer-Verlag New York Inc., 1988.

LEONHARDT, Fritz; MÖNNIG, Eduard. *Construções de concreto – Vol. 4: verificação da capacidade de utilização*. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1979.

PUBLICAÇÕES ESPECIAIS IBRACON - *Comentários técnicos e exemplos de aplicação da NB-1 (NBR 6118:2003) Projeto de estruturas de concreto*. São Paulo: IBRACON, 2007.

SORIANO, Humberto Lima; LIMA, Silvio de Souza. *Análise de Estruturas – Método das Forças e Método dos Deslocamentos*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2006.